

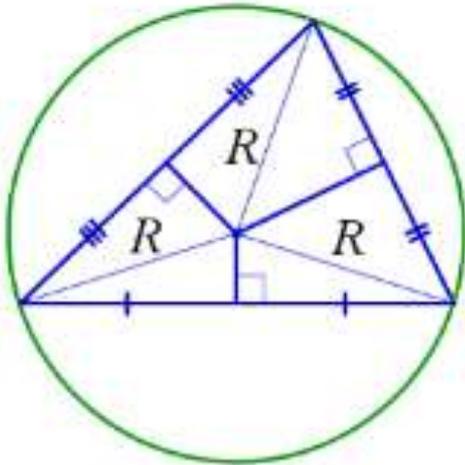
Задание №16

Описанная и вписанная окружности треугольника

Бушман Жанна Анатольевна

учитель математики МБОУ СОШ № 11 им. Ф.Ф. Ушакова город Кропоткин

Описанная окружность:



Если все вершины треугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около треугольника, а треугольник называется вписанным в эту окружность.

Около любого треугольника можно описать окружность и только одну.

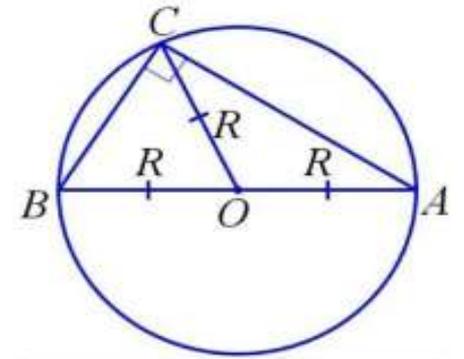
Центр описанной окружности в треугольник – это точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Окружность, описанная около прямоугольного треугольника

Если треугольник *прямоугольный*, то центр описанной окружности – это середина гипотенузы.

Радиус описанной окружности равен половине гипотенузы или длине медианы, проведенной из вершины прямого угла к гипотенузе.

Если центр окружности, описанной около треугольника принадлежит его стороне, то треугольник – **прямоугольный**.

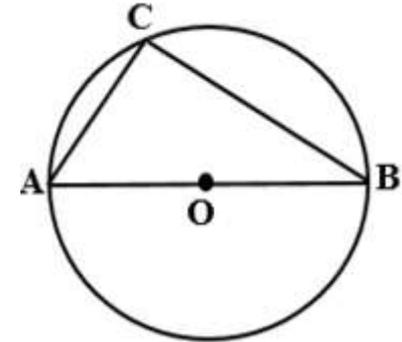


$$OB = OC = OA = R = \frac{1}{2}AB$$

Задача 1

$$R = \frac{1}{2}c$$

Центр окружности, описанной около треугольника ABC лежит на стороне AB . Радиус окружности равен 10. Найдите BC , если $AC = 16$.



Решение

Так как центр окружности, описанной около треугольника принадлежит его стороне, то треугольник ABC – **прямоугольный**. AB -гипотенуза.

$$AB = 2R = 2 \cdot 10 = 20$$

$$\begin{aligned} \text{Из прямоугольного треугольника } ABC \text{ по теореме Пифагора } BC = \\ = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12 \end{aligned}$$

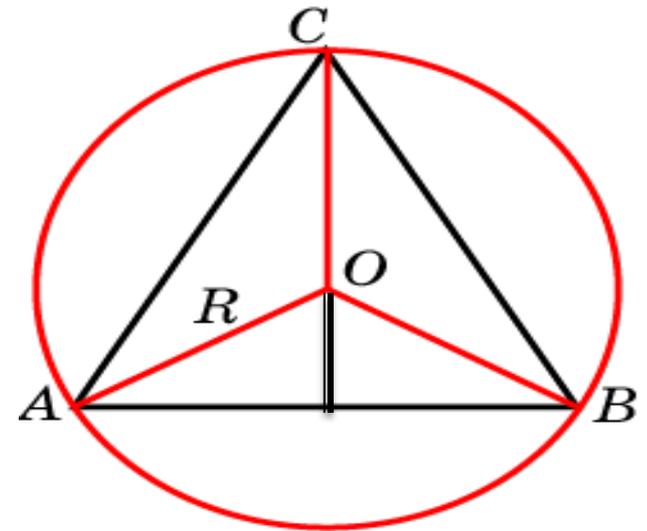
Ответ: 12

Окружность, описанная около равностороннего треугольника

Если треугольник равносторонний, то

$$R = \frac{2}{3} \cdot h, \text{ где } h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

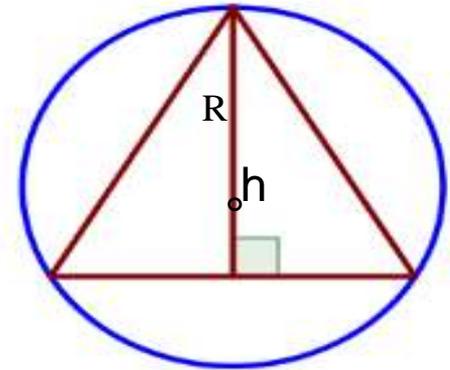
$$\text{или } R = a \frac{\sqrt{3}}{3} \quad R = 2r$$



Задача 2

$$R = \frac{2}{3} \cdot h$$

Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен 6. Найдите высоту этого треугольника



Решение.

$$h = \frac{3R}{2}, \quad h = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$$

Ответ : 9

Задача 3

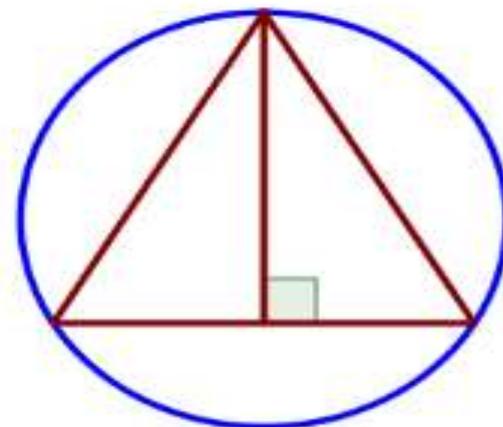
$$R = a \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Сторона равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Решение

$$R = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{3}{3} = 4.$$

Ответ: 4

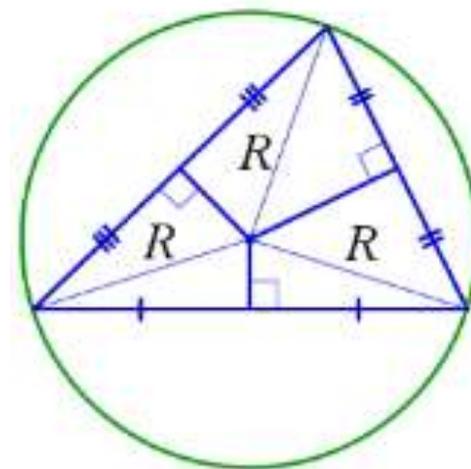


Окружность, описанная около произвольного треугольника

Если треугольник *произвольный*, то

$$R = \frac{abc}{4S}$$

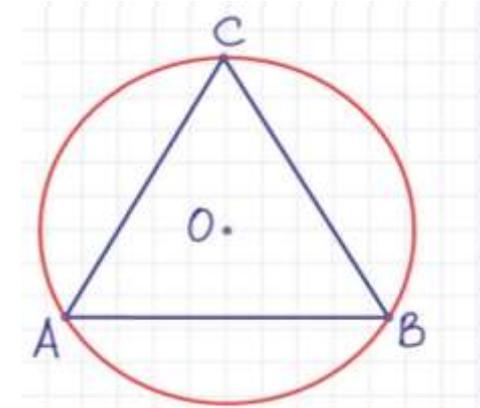
$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$



Задача 4

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $\sqrt{3}$. Найдите сторону AC треугольника ABC.



Решение.

$$a = 2R \sin \angle B = 2\sqrt{3} \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

Ответ: 3

Задача 5(№23)

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

Вершины треугольника делят описанную окружность на три дуги, длины которых относятся как 5:3:10.

Найдите радиус описанной окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 9.

Длины дуг относятся так же, как их градусные меры
 $\sphericalangle AB = 5x$, $\sphericalangle BC = 3x$, $\sphericalangle AC = 10x$. Три дуги в сумме дают окружность.

$$3x + 5x + 10x = 360$$

$$18x = 360$$

$$x = 360 : 18$$

$$x = 20$$

$\sphericalangle AB = 5 \cdot 20 = 100^\circ$, $\sphericalangle BC = 3 \cdot 20 = 60^\circ$, $\sphericalangle AC = 10 \cdot 20 = 200^\circ$.

$\angle BAC = 1/2 \cdot 60^\circ = 30^\circ$ (вписанный угол равен половине дуги, на которую опирается).

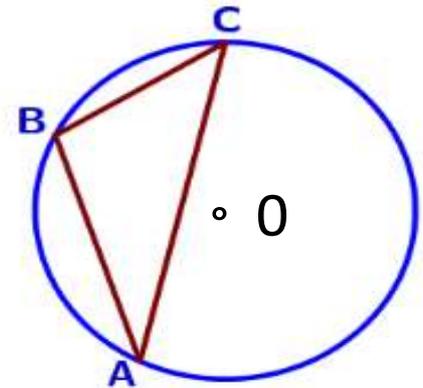
Меньший угол треугольника лежит против меньшей стороны.

BC - меньшая сторона

$$R = \frac{9}{2 \cdot \sin 30^\circ}$$

$$R = \frac{9}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 9$$

Ответ: 9



Задача 6

$$R = \frac{abc}{4S}$$

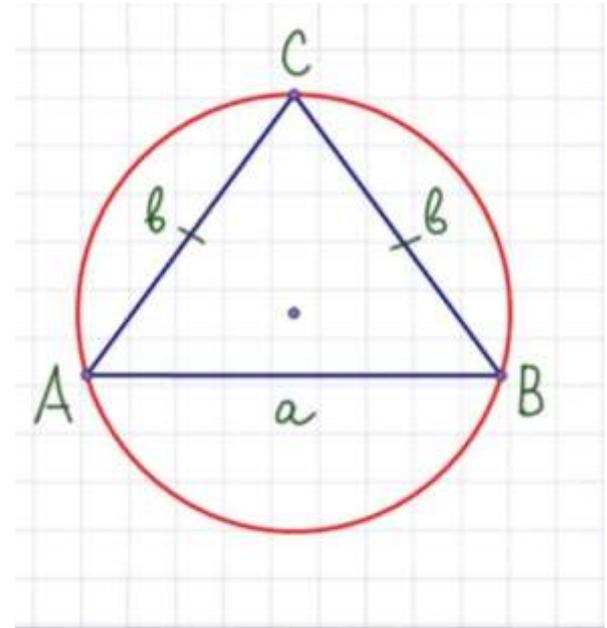
Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 40, основание равно 48. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.

Решение.

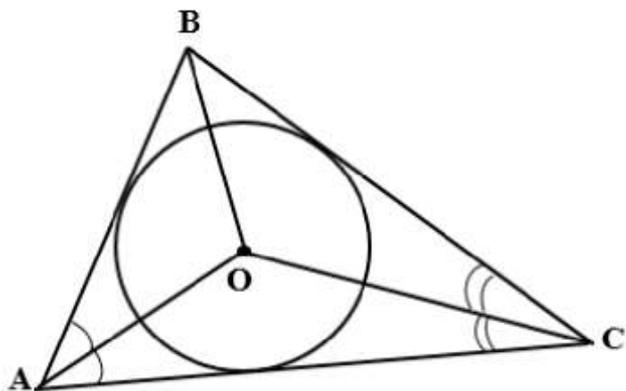
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{a \cdot b^2}{4S}; S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} =$$
$$= (p-b) \sqrt{p(p-a)} = (64-40) \sqrt{64(64-48)} = 24 \cdot 8 \cdot 4$$

$$R = \frac{48 \cdot 40 \cdot 40}{4 \cdot 24 \cdot 8 \cdot 4} = 5 \cdot 5 = 25$$

Ответ: 25



Вписанная окружность:

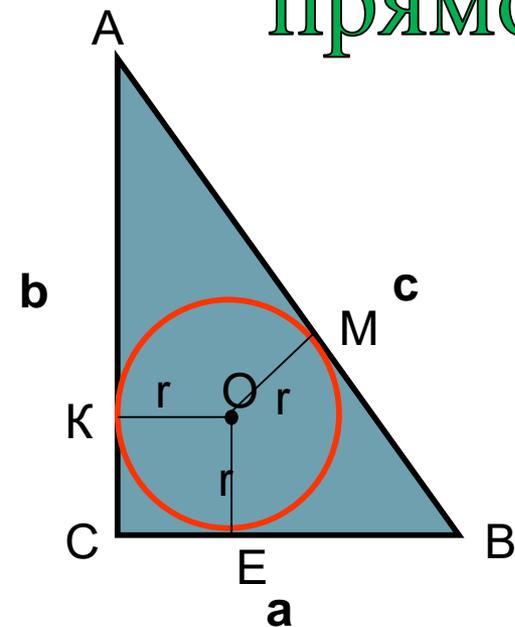


Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон, а треугольник называется описанным около окружности.

В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Центр вписанной окружности в треугольник – это точка пересечения его биссектрис.

Окружность вписанная в прямоугольный треугольник



$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

где r – радиус вписанной окружности,
 a и b - катеты, c - гипотенуза

Задача 7(№23)

В прямоугольном треугольнике длины катетов равны a и b , длина гипотенузы c . Докажите, что радиус вписанной окружности этого треугольника равен $r = \frac{a + b - c}{2}$

Доказательство:

M, K, E – точки касания вписанной окружности и сторон треугольника.

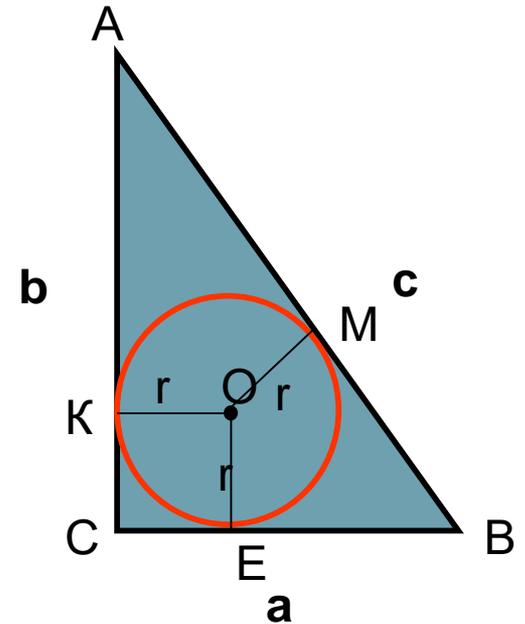
$AK = b - r$, $BE = a - r$,

$AK = AM$, $MB = BE$ (отрезки касательных, проведенные из одной точки к окружности, равны), тогда $c = AM + MB$

$$c = b - r + a - r = a + b - 2r$$

$$2r = a + b - c$$

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$



Окружность вписанная в равносторонний треугольник

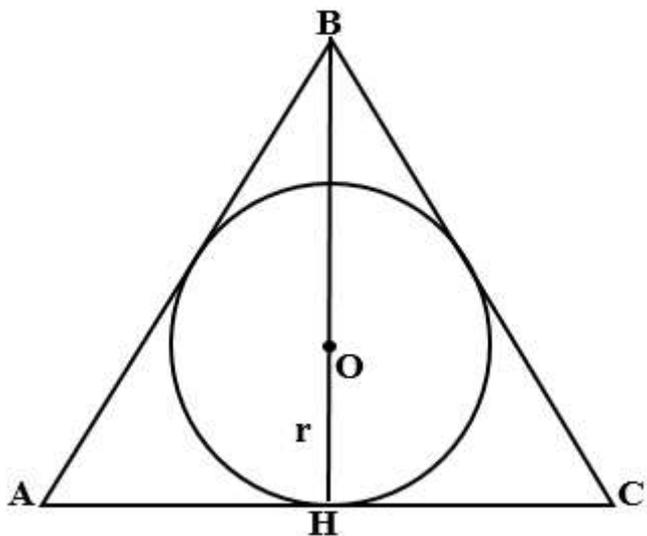
Радиус вписанной окружности

равностороннего треугольника равен одной трети его биссектрисы (она же является медианой и высотой равностороннего треугольника),

$$r = \frac{1}{3} BH$$

Если сторона треугольника равна a , то

$$r = a \frac{\sqrt{3}}{6}$$



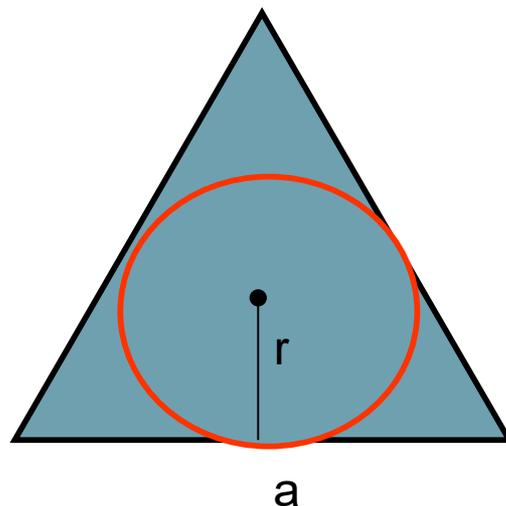
Задача 8

В равносторонний треугольник со стороной 4 см вписана окружность. Найдите её радиус.

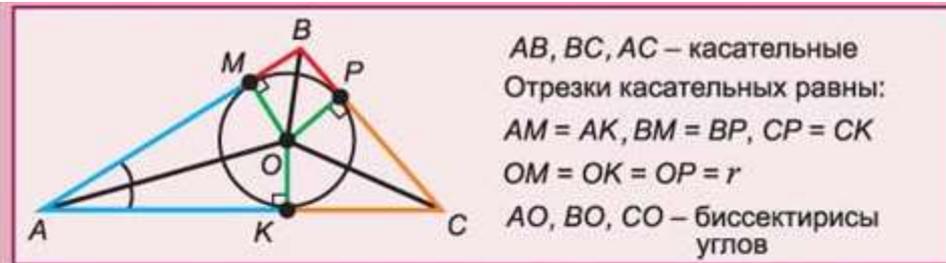
$$r = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

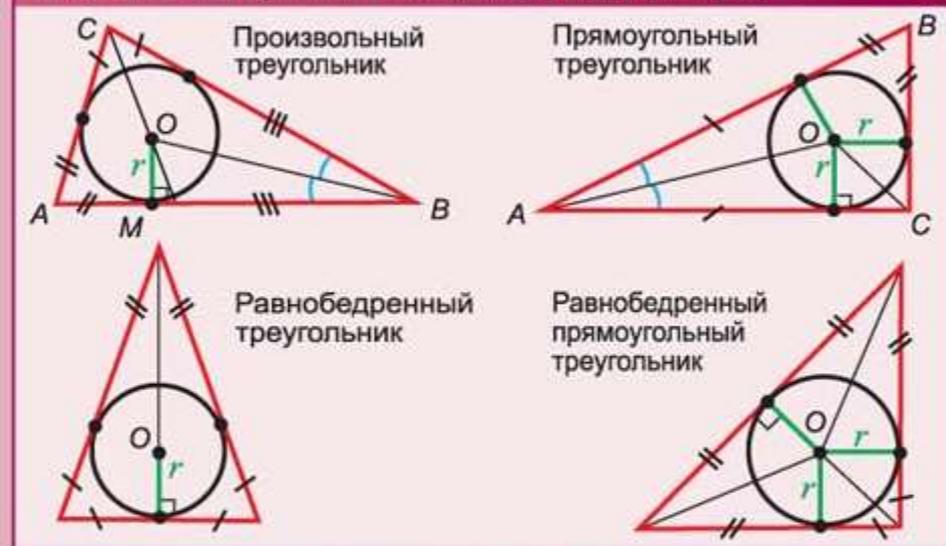
$$r = a \frac{\sqrt{3}}{6}$$



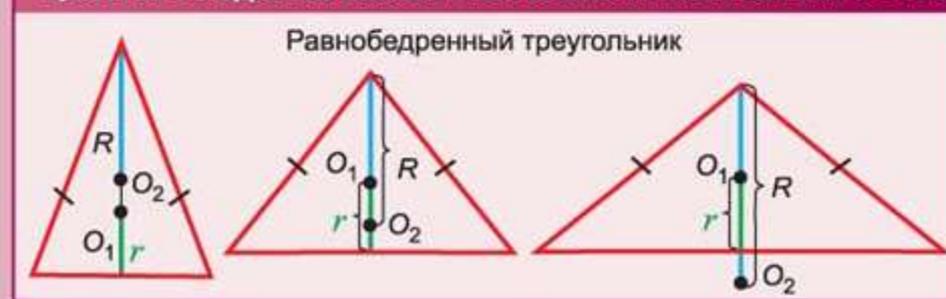
ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



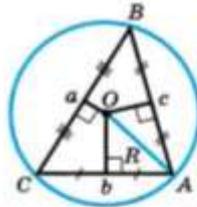
ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ



ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ



Описанная окружность



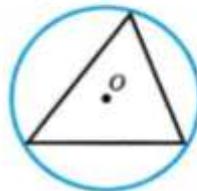
O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;
 $OA = OB = OC = R$

$$R = \frac{a}{2 \sin A}$$

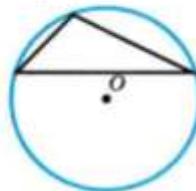
$$R = \frac{abc}{4S}$$

Положение центра описанной окружности

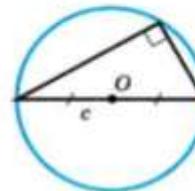
остроугольный
треугольник



тупоугольный
треугольник



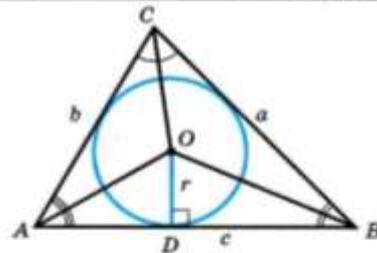
прямоугольный
треугольник



O — середина гипотенузы

$$R = \frac{c}{2}$$

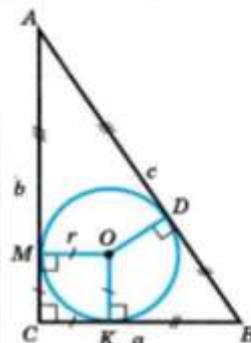
Вписанная окружность



O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника;
 $OD = r$; $OD \perp AB$

$$r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$$

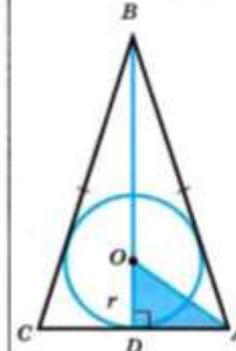
В прямоугольном треугольнике



$$r = \frac{a+b-c}{2}$$

$OK = OM = OD = r$
 (OKCM — квадрат)

В равнобедренном треугольнике



$AB = DC$;
 BD — высота, медиана и биссектриса;
 AO — биссектриса угла A

$$OD = r$$